

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań w zależności od wartości parametru p :

$$\begin{cases} px + y + pz = 1 \\ z + y + x = 1 \\ (2-p)x + (2-p)y + z = 1 \\ pz + y + px = p^2 \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi zależność

$$\text{lin}\{(p, 1, 2-p, p); (1, 1, 2-p, 1); (p, 1, 1, p); (1, 1, 1, p^2)\} \subset \text{lin}\{(p, 1, 2-p, p); (1, 1, 2-p, 1); (p, 1, 1, p)\}.$$

Zadanie 2. W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ podaj wymiar oraz wyznacz bazę przestrzeni

$$V = \text{lin}\{(1, k, -1, 3); (0, -1, k, -1); (-1, k+1, 0, 2); (-1, 2, 1, k-1)\}.$$

Zadanie 3. Zbadaj w zależności od $p \in \mathbb{R}$ liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + px_2 + 2x_3 + 2x_5 = -2 \\ 2x_1 + px_2 + 2x_3 + px_5 = 0 \\ -2x_1 - px_2 - 3x_3 + px_4 - 2x_5 = 3 \\ -4x_1 - (1+p)x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases}$$

W przypadku, gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów, wyznacz zbiór tych rozwiązań stosując metodę Gaussa. Uzasadnij dla jakich wartości p wektor $(-2, 0, 3, -3)$ należy do $W = \text{lin}\{(2, 2, -2, -4), (p, p, -p, -1-p), (2, 2, -3, -1), (0, 0, p, -3), (2, p, -2, 2)\}$.

Zadanie 4. Rozwiąż poniższy układ w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$. Dla tych wartości parametru p , dla których jest to układ Cramera, rozwiąż go wzorami Cramera, a w pozostałych przypadkach metodą Gaussa.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = -1 \\ px_1 - px_2 + x_3 = -p \\ x_1 + px_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

Określ rząd macierzy uzupełnionej powyższego układu w zależności od parametru p .

Zadanie 5. Rozwiąż układ równań w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = m^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m^3 \end{cases}.$$